Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Número de la progresión	9	**Tiempo total de ejecución**	5 horas
Enunciado de la progresión	Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C2M2)		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C2:** Procesos de intuición y razonamiento.
Subcategoría	**C2S2:** Pensamiento intuitivo.
Metas de aprendizaje.	**C2M2:** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.)

Abordaje de la progresión del aprendizaje[4]				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**

Apertura	Docente: Utilizando el portal PruébaT https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/33353/80aab579c5d39b01a342b34475f82b213/346051 el docente presenta la razón de cambio donde no se utiliza el concepto de la derivada. Estudiantado: Utilizando el portal PruébaT antes mencionado contestan el ejercicio de la razón de cambio.	30 min 30 min	Computadora Proyector O bien material impreso de la clase y evaluación de PruebaT	Lista de cotejo Diagnóstico
Desarrollo	Docente: Expone la razón de cambio promedio e instantánea con ejemplo planteado en el siguiente video cuyo enlace es https://www.youtube.com/watch?v=uCrX3vM8bAg Explica los ejemplos de razón de cambio planteados en el documento PG09 Anexo 2. Estudiantado: Integrados en equipos resuelven los ejercicios de razón de cambio planteados en el documento PG09 Anexo 2. Estudiantado: Resuelven los ejercicios de razón de cambio que el docente les asigne de las páginas 151, 152 y 153 del libro El Cálculo de Lois Leithold compartido en su versión digital en el siguiente enlace. https://drive.google.com/file/d/1I4zKNjEf75d1Csw8SibrMjognr7I0Sch/view?usp=drive_link	20 min 40 min 60 min 60 min	Computadora Proyector	Lista de cotejo Heteroevaluación Lista de cotejo Heteroevaluación

Cierre	Estudiantado: Resuelve la evaluación de razón de cambio planteada en el portal de ThatQuiz del siguiente enlace https://www.thatquiz.org/es/preview?c=vnug6115&s=lvsq4s	60 min		Lista de cotejo Autoevaluación

Fuentes de consulta		
BIBLIOGRÁFICA	**VIDEOGRÁFICA**	**PÁGINAS WEB**
• William Anthony Granville. Cálculo Diferencial e Integral. Limusa. México, 2009. • Larson, Hostetler y Edwards. Cálculo y geometría analítica. Mc Graw Hill. • Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1989. • Louis Leithold. El Cálculo. Oxford University Press. México 1998.	• https://www.youtube.com/watch?v=TmbPA_R4P8M • https://www.youtube.com/watch?v=uCrX3vM8bAg	• https://definicion.de/razon-de-cambio/ • https://calculus502.weebly.com/razoacuten- de-cambio • https://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/Calculo1_2013_2/Razondecambio_1.pdf • https://es.khanacademy.org/math/calculus-all-old/taking-derivatives-calc/using-the-formal-definition-of-derivative-calc/a/tangent-lines- andrates-of-change • https://www.thatquiz.org/es/preview?c=vnug6115&s=lvsq4s • https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/razon-de-cambio/ • https://matematicaenlinea.com/recursos/basica2/aplicaciones-de-la-derivada/razones-de- cambio/

ELABORÓ

REVISÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

Lic. Sergio Santos Moreno

PG 09 ANEXO 1

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Si una cantidad y es función de una cantidad x, se puede expresar la razón de cambio de y por unidad de variación de x. Si la relación funcional de y y x está dada por

$$y = f(x)$$

Si x varia del valor x_1 al valor $x_1 + \Delta x$, entonces y varía de $f(x_1)$ a $f(x_1 + \Delta x)$ de modo que la variación de y denotada por Δy es $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ cuando la variación de x es Δx. La razón promedio de variación de y por unidad de variación de x conforme x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$, está dada por

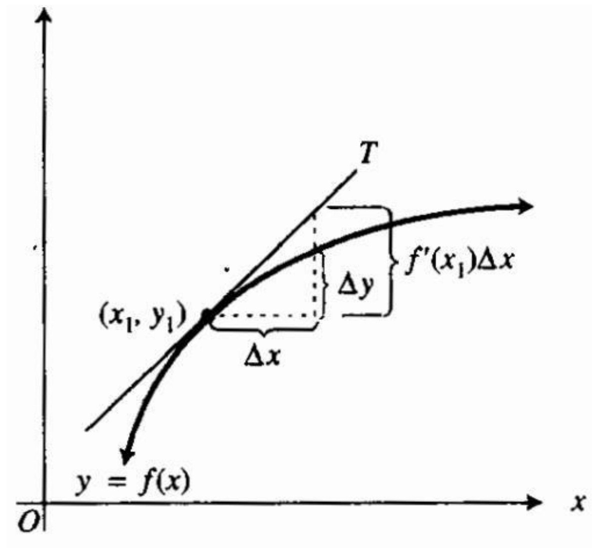
$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si el límite de este cociente existe cuando $\Delta x \to 0$, este límite es el que se considera como tasa instantánea de variación de y por unidad de variación de x en x_1. En consecuencia, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN DE RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA.

Si $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea de y por unidad de variación de x en x_1 es $f'(x_1)$ o, equivalente, la derivada de y con respecto a x en x_1, si esta existe.

Para ilustrar esta definición geométricamente, sea $f'(x_1)$ la razón de cambio instantánea de y por unidad de variación de x en x_1. Entonces si $f'(x_1)$ se multiplica por Δx (la variación de x), el producto es la variación que ocurriría en y por unidad de variación de x está dada por la fracción en la siguiente imagen, y cuando esta fracción se multiplica por Δx en x cuando el punto (x, y) se mueve a lo largo de la gráfica.


T
$f'(x_1)\Delta x$
Δy
(x_1, y_1)
Δx
$y = f(x)$
x
O

PG 09 ANEXO 2

Ejemplo 1.

El lado de una pieza cuadrada de metal incrementa a una razón de 0.1 cm por segundo cuando es calentada. ¿Cuál es la razón de cambio del área de la superficie cuadrada del metal?

Solución

Para resolver este problema, tenemos que empezar por encontrar una ecuación para el área de la pieza cuadrada de metal.

Si es que representamos a los lados de la pieza de metal con x, su área es $A = x^2$.

Tenemos que la razón de cambio de la longitud de un lado con respecto al tiempo, es decir, $\frac{dx}{dt}$, es 0.1 cm/s.

Queremos encontrar la razón de cambio del área con respecto al tiempo, es decir, $\frac{dA}{dt}$.

Si es que derivamos $A = x^2$, tenemos $\frac{dA}{dx} = 2x$. Además, dado que $\frac{dx}{dt} = 0.1$, podemos usar la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= 2x \times 0.1$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.2x$$

La razón de cambio del área es $0.2x$ cm²/s.

Ejemplo 2

El lado de un cuadrado está incrementando a una razón de 5 cm/s. Encuentra la razón de cambio del área cuando la longitud de un lado es 10 cm.

Solución

Nuevamente, empezamos encontrando una ecuación para el área del cuadrado en término de sus lados.

Si es que representamos a los lados del cuadrado con x, su área es $A = x^2$.

De la pregunta, conocemos la razón de cambio de la longitud de un lado con respecto al tiempo, es decir, $\frac{dx}{dt} =$5 cm/s.

Para encontrar la razón de cambio del área, es decir, $\frac{dA}{dt}$, derivamos $A = x^2$ y usamos la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= 2x \times 5$$

$$\frac{dA}{dt} = 10x$$

Cuando la longitud de un lado es 10 cm, la razón de cambio del área del cuadrado es $10(10) = 100$ cm²/s.

Ejemplo 3

El radio de un círculo está incrementando a una razón de $\frac{1}{3}$ cm/s. Encuentra la razón de cambio del área cuando el radio es 5 cm.

Solución

En este caso, tenemos un círculo. La ecuación del área con respecto al radio del círculo es $A = \pi r^2$.

Si es que derivamos a $A = \pi r^2$ con respecto al radio, tenemos $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$.

Ahora, de la pregunta, sabemos que la razón de cambio del radio del círculo con respecto al tiempo, es decir, $\frac{dr}{dt}$, es $\frac{1}{3}$ cm/s.

Entonces, para encontrar la razón de cambio del área con respecto al tiempo, es decir, $\frac{dA}{dt}$, podemos usar la regla de la cadena:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r \times \tfrac{1}{3}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi r}{3}$$

Cuando el radio es 5 cm, la razón de cambio del área del círculo es $\frac{2\pi(5)}{3} = \frac{10\pi}{3}$ cm^2/s.

EJERCICIO 1

El área de un cuadrado está incrementando a una razón de 7 cm^2/s. Encuentra la razón de cambio de la longitud de un lado cuando el área es 100 cm^2.

EJERCICIO 2

El área de un círculo está incrementando a una razón de (4π) cm^2/s. Encuentra la razón de cambio del radio cuando este radio es 1/2 cm.

EJERCICIO 3

El volumen de un cubo está incrementando a una razón de 18 cm^3/s. Encuentra la razón de cambio de la longitud de un lado cuando el volumen es 125 cm^3.

EJERCICIO 4

Un globo completamente esférico está siendo inflado a una razón de 3 cm^3/s. Encuentra la razón de cambio del radio cuando el radio es 2 cm.

EJERCICIO 5

El área superficial de una esfera está incrementando a una razón de 2 cm^2/s. Encuentra la razón de cambio del radio cuando el área superficial es (100π) cm^2.

EJERCICIO 6

Un globo esférico está siendo inflado a una razón de 10 cm^3/s. Encuentra la razón de cambio del área superficial cuando el radio es 5 cm.

EJERCICIO 7

Un contenedor tiene la forma de un cono hueco con un ángulo semi-vertical de 30° y su vértice apunta hacia abajo.

Si es que el agua es vertida en el cono a una razón de 5 cm^3/s, encuentra la razón a la cual la profundidad del agua en el cono está incrementando cuando su profundidad es 10 cm.

LISTA DE COTEJO PARA EVALUAR LA ACTIVIDAD DE DIAGNÓSTICO

Alumno a evaluar	Semestre Grupo	Fecha
	INSTRUCCIONES: Escriba una x en la columna SI, cuando se cumple con la actividad o una x en la columna NO en caso contrario para cada aspecto a evaluar.	

Aspecto a evaluar	CUMPLIMIENTO		PONDERACIÓN
	SI	NO	
1. Resolvió los cinco reactivos propuestos por el portal PruebaT.			
2. Los resolvió dentro del tiempo establecido.			
3. Incluyó las operaciones de identificación de la razón de cambio en cada reactivo.			
4. Todos los reactivos se resolvieron correctamente.			

TOTAL:

LISTA DE COTEJO PARA EVALUAR LOS EJERCICIOS DE PG09 ANEXO 2

Equipo a evaluar	Semestre Grupo	Fecha
	INSTRUCCIONES: Escriba una x en la columna SI, cuando se cumple con la actividad o una x en la columna NO en caso contrario para cada aspecto a evaluar.	

Aspecto a evaluar	CUMPLIMIENTO		PONDERACIÓN
	SI	NO	
1. Resolvieron los siete ejercicios planteados.			
2. Plantearon correctamente la razón de cambio a obtener en cada ejercicio.			
3. Los resolvieron dentro del tiempo establecido.			
4. Llegaron al resultado correcto en los 7 ejercicios			
5. Participaron todos los integrantes del equipo.			

TOTAL:

LISTA DE COTEJO PARA EVALUAR LOS EJERCICIOS DEL LIBRO EL CÁLCULO

Alumno a evaluar	Semestre Grupo	Fecha
	INSTRUCCIONES: Escriba una x en la columna SI, cuando se cumple con la actividad o una x en la columna NO en caso contrario para cada aspecto a evaluar.	

Aspecto a evaluar	CUMPLIMIENTO		PONDERACIÓN
	SI	NO	
1. Resolvieron todos los ejercicios asignados por el docente.			
2. Plantearon correctamente la razón de cambio a obtener en cada ejercicio.			
3. Los resolvieron dentro del tiempo establecido.			
4. Llegaron al resultado correcto en los ejercicios			
5. Participaron todos los integrantes del equipo.			

TOTAL:

LISTA DE COTEJO PARA AUTOEVALUAR LA ACTIVIDAD DEL PORTAL ThatQuiz

Equipo que se autoevalúa	Semestre Grupo	Fecha
	INSTRUCCIONES: Después de haber terminado la actividad les corresponde autoevaluar su actividad. Escriban una x en la columna SI, cuando se cumple con la actividad o una x en la columna NO en caso contrario para cada aspecto a evaluar.	

Aspecto a evaluar	CUMPLIMIENTO		PONDERACIÓN
	SI	NO	
1. 1. Identificamos la pendiente en cada uno de los reactivos.			
2. Interpretamos correctamente la gráfica en cada reactivo.			
3. Resolvimos todo dentro del tiempo establecido			
4. Llegamos el resultado correcto en cada uno de los reactivos.			
5. Todos los integrantes del equipo partcipamos.			

TOTAL:

Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Etapa de la progresión (Número)	10	**Tiempo total de ejecución**	4 horas
Enunciado de la progresión	Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica (C1M3, C2M4, C4M2).		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C1:** Procedural. **C2:** Procesos de intuición y razonamiento. **C4**: Interacción y lenguaje matemático.
Subcategoría	**C1S3:** Elementos variacionales **C2S1:** Capacidad para observar y conjeturar. **C4S1:** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **C4S3:** Ambiente matemático de comunicación
Metas de aprendizaje.	**C1M3:** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares. **C2M4:** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. **C4M2:** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal. - Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.) - Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Abordaje de la progresión del aprendizaje				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	**Docente:** Presenta unas funciones para obtener la primera y segunda derivada de algunas funciones polinomiales donde los alumnos con una lluvia de ideas aportan el resultado. Retroalimentando sobre la importancia de los máximos y mínimos que existe en una función polinomial de grado 3.	60 min	Pizarrón plumones	No aplica
Desarrollo	**Docente:** Presenta la siguiente diapositiva anexa en este documento. Para hallar: **(Anexo 1).** a) Valores críticos de una función. b) Intervalos de crecimiento a partir de la primera derivada. c) Puntos máximos y mínimos de acuerdo al criterio de la primera derivada. d) Concavidades a partir de la segunda derivada. e) Punto de inflexión a partir del criterio de la segunda derivada. f) Trazo de gráfica, utilizando los datos obtenidos en los puntos anteriores. Explicando el uso de algunas apps para graficar desde su dispositivo móvil. (Geogebra, calculadora gráfica, etc.)	60 min	Proyector Laptop	No aplica
Cierre	**Docente:** Forma equipos de 4 integrantes. Y les da dos funciones para trazar la gráfica, llevando a cabo cada uno de los pasos vistos anteriormente. Ejercicio propuesto **Anexo 2.**	120 min	Cuadernos lápiz Dispositivo móvil	Guía de observación Anexo 3.

ELABORÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

Anexo 1.

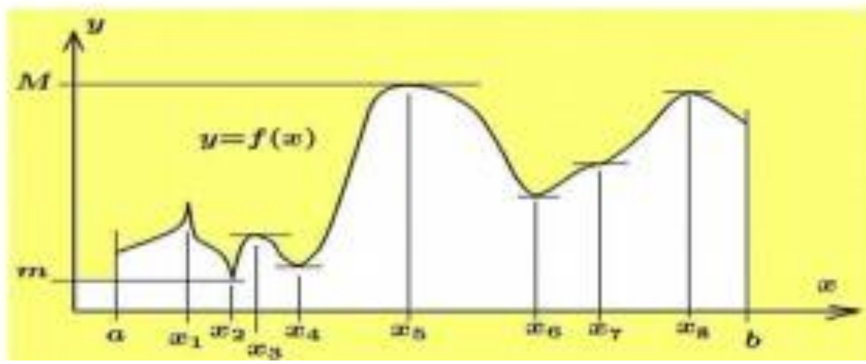
Introducción Máximos y Mínimos

Resumen

Cuando la curva de la función y = f(x) indica los puntos críticos en su línea horizontal. Produce un máximo local o un valor máximo relativo de f(x) en aquellos puntos donde el movimiento de izquierda a derecha muestran la altura de los aumentos de la curva, luego se detiene y comienza a disminuir. Un mínimo local o un valor mínimo relativo de f(x) se dice que se produce en aquellos puntos en los que al moverse de izquierda a derecha la altura de la curva disminuye, luego se detiene y comienza a aumentar.

Introducción

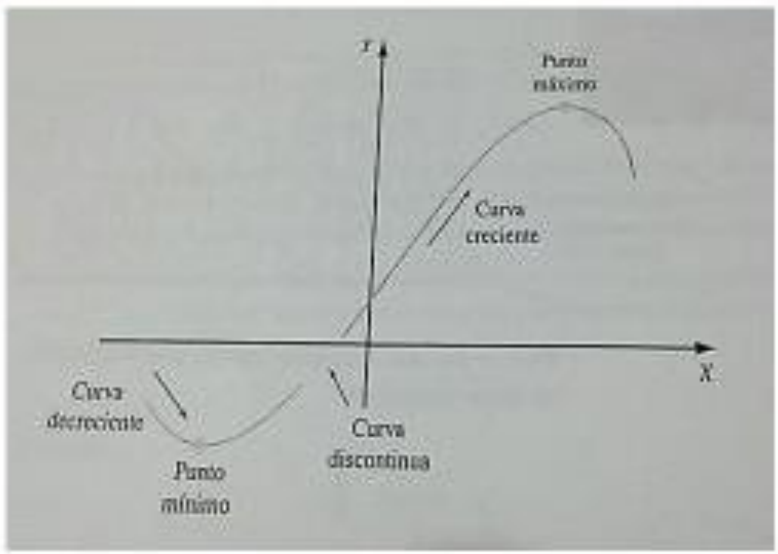
- Los máximos y mínimos de una función de dos variables miden altitudes máximas y mínimas sobre la superficie que constituye la gráfica de una función (son como medir los puntos más importantes de elevación y profundidad)



Definición formal de máximos y mínimos

Como Conclusión:

- f(x) tiene un máximo si dy/dx = 0 y la dy/dx cambia de signo de + a –
- f(x) tiene un mínimo si dy/dx = 0 y la dy/dx cambia de signo de - a +



Método de la primera derivada

- Paso 1: Derivar la función. $(fx) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$$

- Paso 2: Igualar a cero la función derivada.

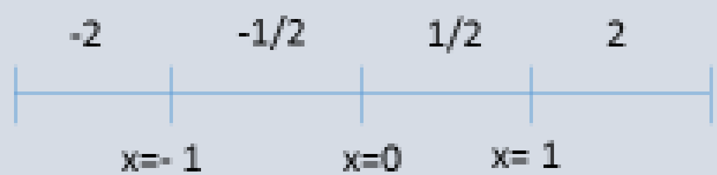
$$4x^3 - 4x = 0$$

- Paso 3: Encontrar los valores en x que satisfagan la ecuación.

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

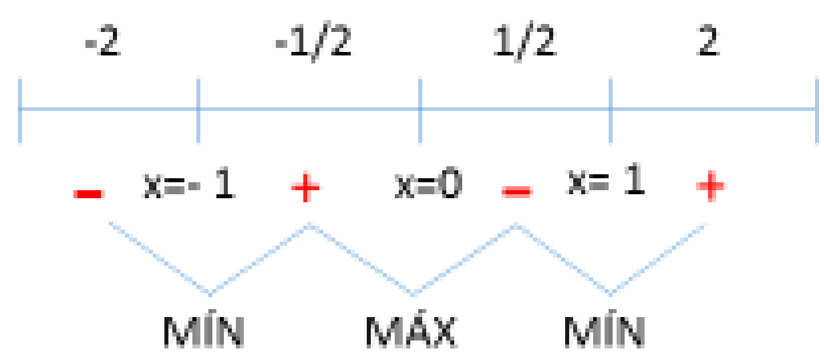
$$x = 0; x = \pm 1$$

- Paso 4: Evaluar la derivada de la función.



Método de la primera derivada

<u>X = - 2</u> $Y' = 4x^3 - 4x;\ 4(-2)^3 - 4(-2)$ $Y' = -24$ <u>X = - 1/2</u> $Y' = 4x^3 - 4x;\ 4(-1/2)^3 - 4(-1/2)$ $Y' = 3/2$	<u>X = 1/2</u> $Y' = 4x^3 - 4x;\ 4(1/2)^3 - 4(1/2)$ $Y' = -3/2$ <u>X = 2</u> $Y' = 4x^3 - 4x;\ 4(2)^3 - 4(2)$ $Y' = 24$



Método de la segunda derivada

- Paso 1: Hallar la derivada de la función.

$$(fx) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$$

- Paso 2: Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación; las raíces reales son los valores críticos de la variable.

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0;\ x = \pm 1$$

- Paso 3: Hallar la segunda derivada.

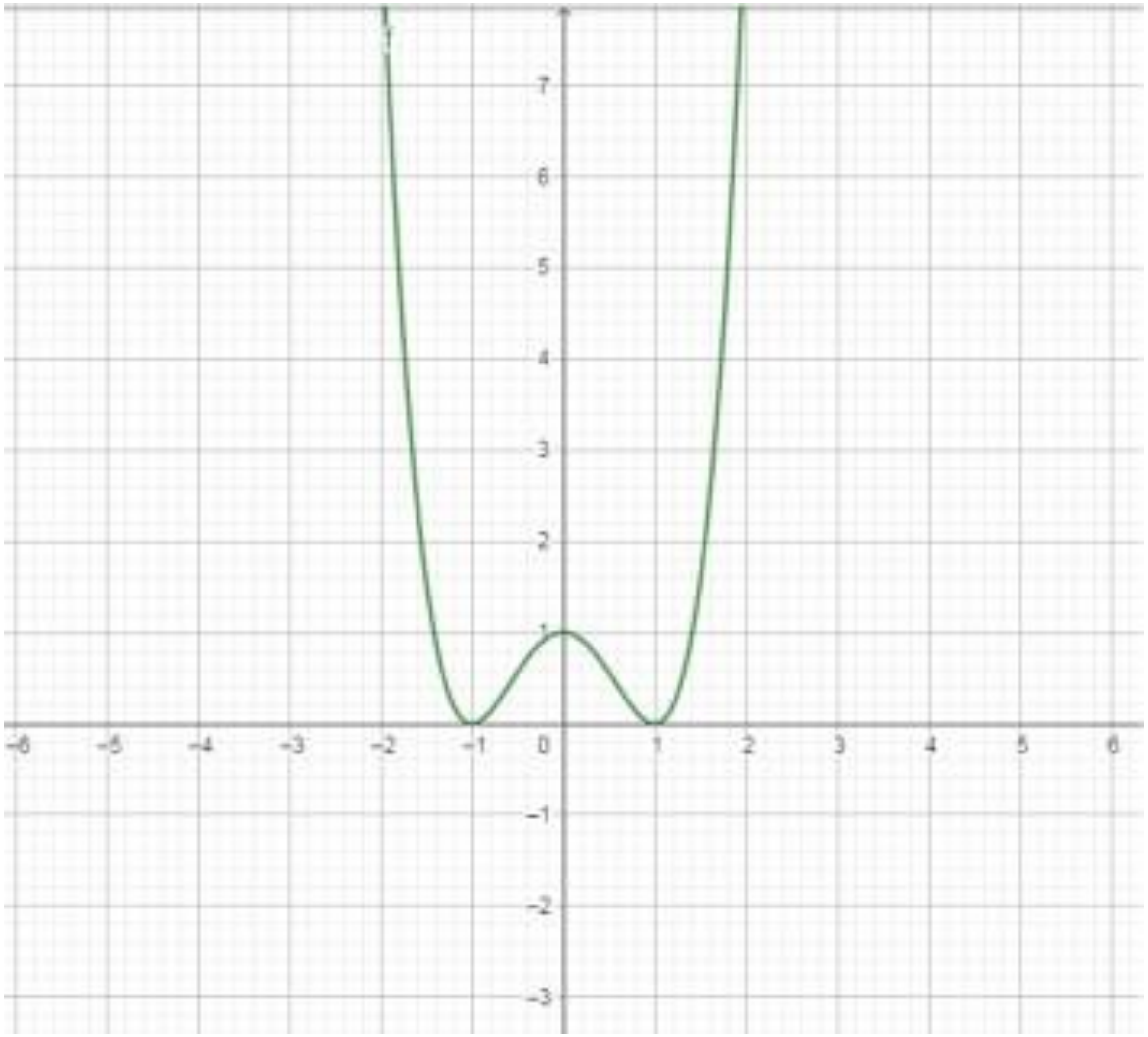
$$y'' = 12x^2 - 4$$

Método de la segunda derivada

- Paso 4: Sustituir en la segunda derivada en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos, si el resultado es negativo será un máximo, si el resultado es positivo será un mínimo.

$f''(x) = 12(-1)^2 - 4 = +8$ MÍN
$f''(x) = 12(0)^2 - 4 = -4$ MÁX
$f''(x) = 12(1)^2 - 4 = +8$ MÍN

Con estos datos ya se puede bosquejar la grafica. En cualquier aplicación que maneje el docente.


7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6

Anexo 2.

Ejercicios propuestos

Para las funciones siguientes encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, así como los puntos de inflexión:

1. $f(x) = 4 - 5x^3 + 3x^5$
2. $f(x) = x^2(2x - 9)$ Elabora la gráfica.
3. $f(x) = x^2(2x^2 - 3x - 12)$

En los ejercicios 4 a 6, identifica los extremos relativos. Usa el criterio de la segunda derivada.

4. $f(x) = (x - 5)^2$
5. $f(x) = 2 - 4x^3 + x^4$ Elabora la gráfica.
6. $f(x) = 3 - 3x^2 + x^3$

Anexo 3. Guia de observación para actividad de cierre.

Nombre de la UAC: **PENSAMIENTO MATEMATICO III**	Semestre/grupo:	**Puntaje**
Fecha:		
Integrantes del equipo: 1.___________________________________ 2.___________________________________ 3.___________________________________ 4.___________________________________		

ACTIVIDAD DE CIERRE			
Acciones a evaluar	Registro de cumplimiento		Observaciones
	SI	NO	
El equipo desarrolla correctamente los criterios de la primera derivada.			
El equipo identifica sin dificultad los puntos máximos y mínimos de la función.			
El equipo aplica correctamente los criterios de la segunda derivada para identificar las concavidades.			
El equipo concluye el trazo de grafica de manera correcta.			

Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Etapa de la progresión (Número)	11	**Tiempo total de ejecución**	4 horas
Enunciado de la progresión	Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C2M4, C3M4, C4M2).		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C2:** Procesos de intuición y razonamiento. **C3** Solución de problemas y modelación. **C4** Interacción y lenguaje matemático.
Subcategoría	**C2S1** Capacidad para observar y conjeturar. **C2S2** Pensamiento intuitivo. **C2S3** Pensamiento formal. **C3S2** Construcción de modelos. **C3S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios. **C4S3** Ambiente matemático de comunicación.
Metas de aprendizaje.	**C2M4** Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. **C3M4** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático. **C4M2** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	• Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.). • Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas. • Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Abordaje de la progresión del aprendizaje				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	Encuadre. A través de una lluvia de ideas, se recupera desde el abordaje de las progresiones anteriores de nuestro estudiantado, respecto a el máximo y el mínimo de una función, como se encuentra a partir de la derivada.	20 min.	Pizarrón Plumones	Es un diagnostico informal.
Desarrollo	A través de una clase, como estrategia de enseñanza, el docente resuelve un ejemplo de aplicación para "Encontrar las dimensiones del recipiente para las cuales el costo sea el mínimo". **PG 11 Anexo 1**. A través de una clase, como estrategia de enseñanza, el docente resuelve un ejemplo de aplicación para "Encontrar la	50 min 50 min	Pizarrón. Plumones. Pizarrón. Plumones.	

[4] Planteé una estrategia didáctica para abordar la progresión de aprendizaje que fue seleccionado.

	medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de la caja sea el máximo”. **PG 11 Anexo 2**.			
Cierre	En equipos de cinco integrantes, el docente propone al estudiantado, encontrar la medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de una caja sea el máximo. **PG 11 Anexo 3**. En equipos de cinco integrantes, el estudiantado, expone el proyecto diseñado de la caja de la actividad anterior.	60 min 60 min	Libreta Lápiz Libreta Lápiz	Lista de cotejo 1. Lista de cotejo 2.

Fuentes de consulta

BIBLIOGRÁFICA	VIDEOGRÁFICA	PÁGINAS WEB
Cálculo diferencial e integral. William Anthony Granville. Editorial Limusa.	https://www.youtube.com/watch?v=_exKGOyFZ50 https://www.youtube.com/watch?v=GkH56yhH66A https://www.youtube.com/watch?v=CrdPclEwH1E https://www.youtube.com/watch?v=q9Oj5j5q7zc	https://alumnos.cobachbcs.edu.mx/calculo-diferencial/

ELABORÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

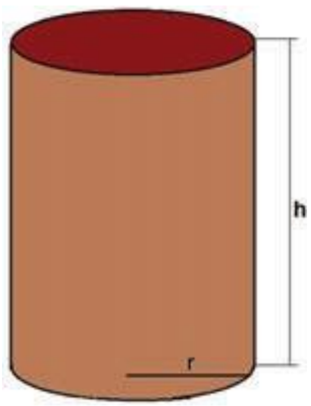
REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

ANEXOS

PG 11 Anexo 1.

Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de 24π cm^3. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para las paredes. Encontrar las dimensiones del recipiente para las cuales el costo sea el mínimo.



Solución

Si designamos como “*r*” al radio de la base y “*h*” a la altura del recipiente y con la fórmula del volumen de un cilindro igualando al volumen que debe tener el mismo nos da $\pi r^2 h = 24\pi$.

Esto nos da la relación $h = \frac{24}{r^2}$ que al ser la función que delimita las medidas de la lata en función del volumen que debe alcanzar sería nuestra Función Restricción (FR).

Para la construcción de la Función Objetivo (FO) debemos tener en cuenta que lo que queremos es minimizar el costo de fabricación por lo tanto nuestra función va a ser una función costo “*C*”. Para determinar el costo del material recordemos que el precio de la base es tres veces mayor que la parte curva por lo tanto si designamos como *"a"* al valor de la parte curva el valor de la base será *"3a"*.

El costo de fabricación del recipiente viene dado por:

$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) = a\pi(3r^2 + 2rh)$

Y como $h = \frac{24}{r^2}$ tenemos

$C = a\pi\,(3r^2 + 2r\frac{24}{r^2}) = a\pi\,(3r^2 + \frac{48}{r})$

Esta fórmula expresa al costo *"C"* como función del radio *"r"* ya que *"a"* es un valor dado por el costo del material y es un número fijo.

Determinamos ahora los puntos críticos derivando la función e igualando a *0*.

$C'(r) = a\pi\,(6r - \frac{48}{r^2})$

$$a\pi\,(6r - \frac{48}{r^2}) = 0$$

$$6r - \frac{48}{r^2} = 0$$

$$6r = \frac{48}{r^2}$$

$6r^3 = 48$

$r = \sqrt[3]{8} = 2$

Si queremos comprobar si este valor es un máximo o un mínimo lo reemplazamos en la segunda derivada

$C''(r) = a\pi\,(6 + \frac{48}{r^3})$

$C''(2) = a\pi\,(6 + \frac{48}{2^3}) = 12a\pi$, como es positivo significa que es un mínimo.

El valor de la altura lo sacamos de $\mathrm{h} = \frac{24}{r^2} = \frac{24}{2^2} = 6$

Conclusión: Las medidas que minimicen el costo de fabricación del envase de forma cilíndrica son el radio de 2 cm y la altura de 6cm.

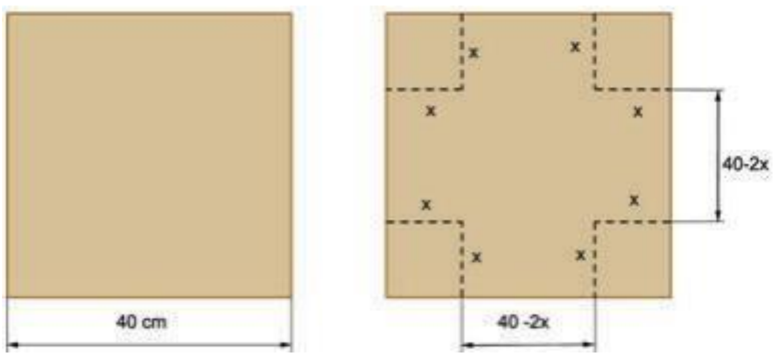
PG 11 Anexo 2.

Se posee un pedazo cuadrado de cartulina de 40 cm de lado y se pide construir una caja sin tapa cortando pedazos cuadrados en las esquinas para doblar los lados y formar la caja. Encontrar la medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de la caja sea el máximo.

Solución

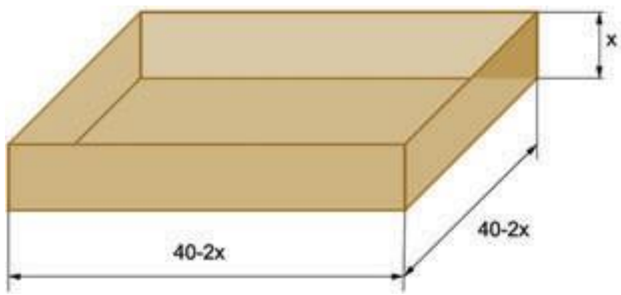
Se realizarán cortes cuadrados en las esquinas, como la medida del corte se debe determinar la definiremos como variable "*x*".

La gráfica de la cartulina y de los cortes que se realizarán es la siguiente:



De acuerdo a la información dada el volumen en función del corte que hagamos en las esquinas de la caja es:

$$V(x) = (40 - 20x)(40 - 20x)x$$



Realizando las operaciones para expresarlo en forma de polinomio tenemos

$\mathrm{V(x)} = (1600 - 80\mathrm{x} - 80\mathrm{x} + 4x^2)\mathrm{x}$

$\mathrm{V(x)} = 4x^3 - 160x^2 + 1600\mathrm{x}$, que sería nuestra Función Objetivo (FO)

Este problema no tiene Función Restricción.

Debemos darnos cuenta que se pueden realizar cortes cuadrados en las esquinas hasta un valor máximo de *20 cm* que sería llegar hasta la mitad de la cartulina que es cuando esta se dividiría en cuatro partes y no se podría formar la caja, por lo tanto el dominio de esta función es $0 \leq x \leq 20$ o también se puede expresar $[0,20]$

Procedemos ahora a determinar los puntos críticos de la función a través de la derivada e igualando a 0.

$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1600$

$12x^2 - 320x + 1600 = 0$

Para resolver podemos factorizar o aplicar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aplicaremos la fórmula general y reemplazando los datos tenemos que:

$$x = \frac{-(-320) \pm \sqrt{(-320)^2 - 4(12)(1600)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{320 \pm 160}{24}$$

$$x_1 = \frac{320 - 160}{24} = \frac{160}{24} = \frac{20}{3}$$

$$x_2 = \frac{320 + 160}{24} = \frac{480}{24} = \frac{240}{12} = 20$$

Para determinar si estos puntos críticos son máximos o mínimos aplicamos el criterio de la segunda derivada que decía que se deben evaluar estos valores en la segunda derivada y si la respuesta es positiva es un mínimo y si es negativa es un máximo

$$V''(x) = 24x - 320$$

$V''\left(\frac{20}{3}\right) = 24\left(\frac{20}{3}\right) - 320 = -160$, como es negativo significa que es un máximo.

$V''(20) = 24(20) - 320 = 160$, como la función está definida sobre un intervalo cerrado *[0,20]* evaluamos ahora los valores frontera en la función para observar si se da el máximo en alguno de estos valores aunque el valor frontera derecho coincide con el segundo punto crítico que nos daba un mínimo.

$\mathrm{V}(0) = 4(0)^3 - 160(0)^2 + 1600(0)$

$\mathrm{V}(0) = 0$

$\mathrm{V}(20) = 4(20)^3 - 160(20)^2 + 1600(20)$

$\mathrm{V}(20) = 0$

Lo que significa físicamente que tanto si no realizamos ningún corte como si cortamos cuadrados de 20 cm no podremos formar la caja por lo tanto el volumen es *0*

Conclusión: Los cortes cuadrados en las esquinas de la cartulina deben ser de 20/3 cm es decir aproximadamente 6,67 cm y con ello lograremos un volumen máximo en la caja de

$\mathrm{V}\left(\frac{20}{3}\right) = 4\left(\frac{20}{3}\right)^3 - 160\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 1600\left(\frac{20}{3}\right) = 4740.74\mathrm{cm}^3$.

PG 11 Anexo 3.

Asignar a cada equipo una medida de un pedazo cuadrado de cartulina en cm de lado y se pide construir una caja sin tapa cortando pedazos cuadrados en las esquinas para doblar los lados y formar la caja. Encontrar la medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de la caja sea el máximo.

Lista de cotejo 1.
Para evaluar la elaboración de la caja en equipos de cinco integrantes, el docente propone al estudiantado, encontrar la medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de una caja sea el máximo.

Nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular :	**Sem/grup:**	
Integrantes del equipo: **1.______________________________** **2.______________________________**	**Fecha:** **Puntaje:**	
Criterio	**Registro de cumplimiento**	
	SI	**NO**
Colabora y apoya a sus compañeros		
Demuestra interés en el desarrollo de la elaboración la caja.		
Escucha con respeto a los integrantes del equipo.		
Conoce el procedimiento para hallar el máximo volumen.		
Obtiene la función correcta del volumen.		
Realiza el procedimiento correcto en la primera derivada		
Realiza el procedimiento correcto en la segunda derivada		
Logra elaborar la caja con las medidas correctas.		

Lista de cotejo 2.
Para evaluar la exposición del equipo de la elaboración de la caja al encontrar la medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de una caja sea el máximo.

<table>
<tr><td>Nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular :</td><td colspan="2">Sem/grup:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Integrantes del equipo:
1.______________________________
2.______________________________</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Criterio</td><td colspan="2">Registro de cumplimiento</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>Colabora y apoya a sus compañeros</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Demuestra interés en la exposición.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Escucha con respeto a los integrantes del equipo.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Se expresa de manera correcta.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Expone con claridad el procedimiento para elaborar la caja con las medidas correctas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Responde correctamente las preguntas de sus compañeros de grupo.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Datos generales[1]					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje[2]			
Etapa de la progresión (Número)	12	**Tiempo total de ejecución**	5 horas
Enunciado de la progresión	Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que las funciones exponenciales y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C2M3 y C3M2)		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje[3]	
Categoría	**C2:** Procesos de intuición y razonamiento. **C3:** Solución de problemas y modelación
Subcategoría	**C2S1:** Capacidad para observar y conjeturar. **C2S2:** Pensamiento Intuitivo. **C2S3:** Pensamiento Formal. **C3S2:** Construcción de modelos
Metas de aprendizaje.	**C2M2:** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **C3M2:** Construye un modelo matemático identificando las variables de interés , con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	• Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.) • Modela y propone soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

Abordaje de la progresión del aprendizaje				
	Descripción de la estrategia o actividad	Tiempo de ejecución	Recursos/ material didáctico	Instrumentos de evaluación.
Apertura	Atraves del video, el docente propicia una lluvia de ideas concerniente al tema de funciones exponenciales https://www.youtube.com/watch?v=QiI8cKvCKVc https://www.youtube.com/watch?v=cve1o54sEFY Preguntas detonadoras ¿Dónde se aplican las funciones exponenciales? ¿Qué es una función exponencial? ¿ cuándo se inventaron los logaritmos ¿Quiénes fueron los precursores?	40 min 20 min	Proyector Laptop Pizarrón Plumones	Es una evaluación diagnostica
Desarrollo	El docente realiza la exposición de funciones exponenciales y funciones logaritmos. Vea ANEXO 1 PM3 PG12 El estudiante lleva a cabo el ejercicio propuesto por el docente de del tema de funciones exponenciales y funciones logarítmicas. Vea ANEXO 2 PM3 PG12	80 min 80 min	-hoja blancas	Lista de cotejo
Cierre	El estudiante utiliza la App del GeoGebra para la construcción de graficas logarítmicas y exponenciales, llegando a la conclusión que son funciones inversas.	80 min.	Dispositivo electrónico	Lista de cotejo

Fuentes de consulta		
BIBLIOGRÁFICA	**VIDEOGRÁFICA**	**PÁGINAS WEB**
STEWART, J y Otros. (2001). Precálculo (3ra ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A. LARSON, Ron. (2012) Precálculo (8ª. Ed) México- Cengage Learning Editores, S.A.	https://www.youtube.com/watch?v=QiI8cKvCKVc https://www.youtube.com/watch?v=cve1o54sEFY	

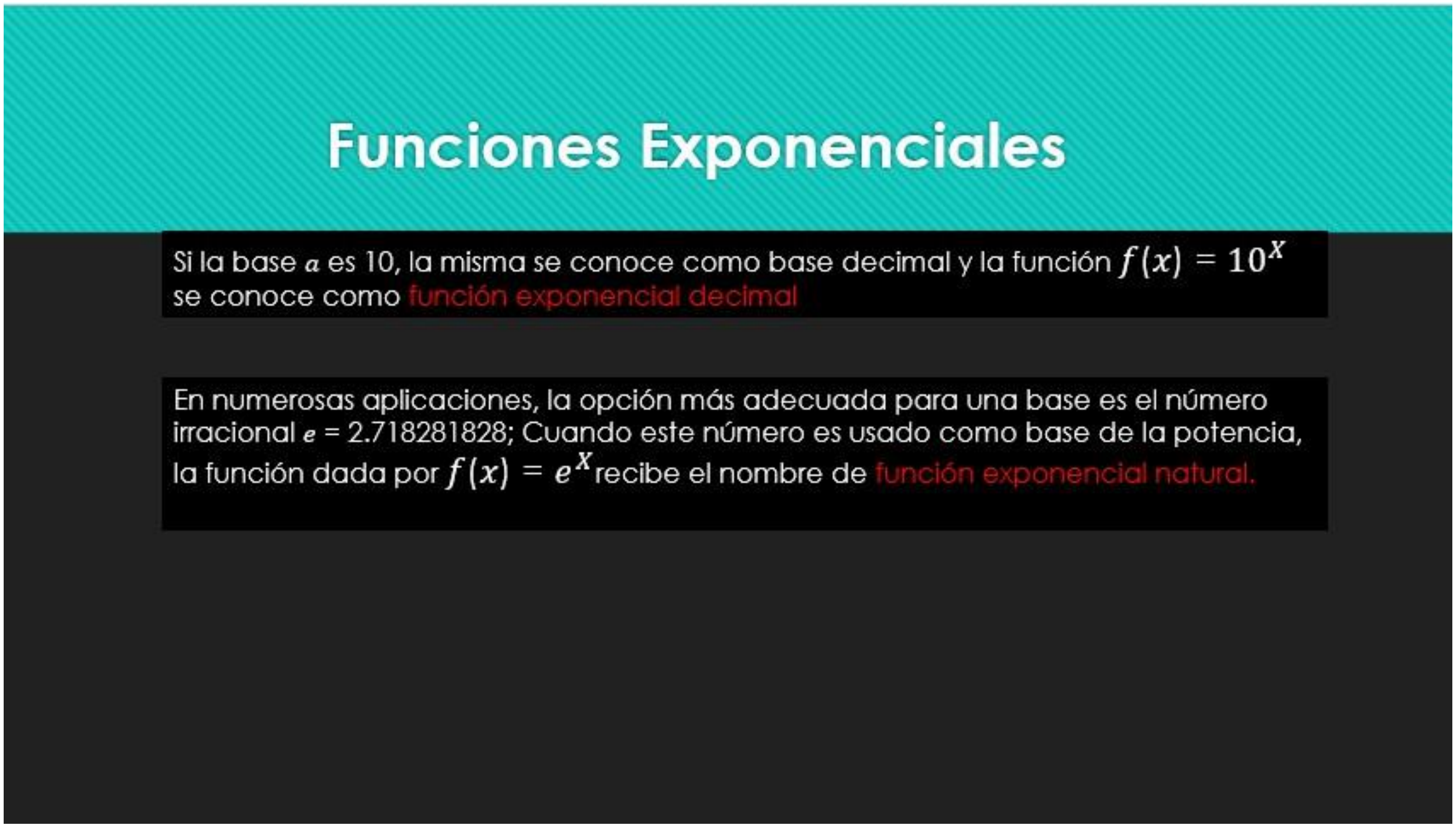
ELABORÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

PG 12 ANEXO 1 PM3

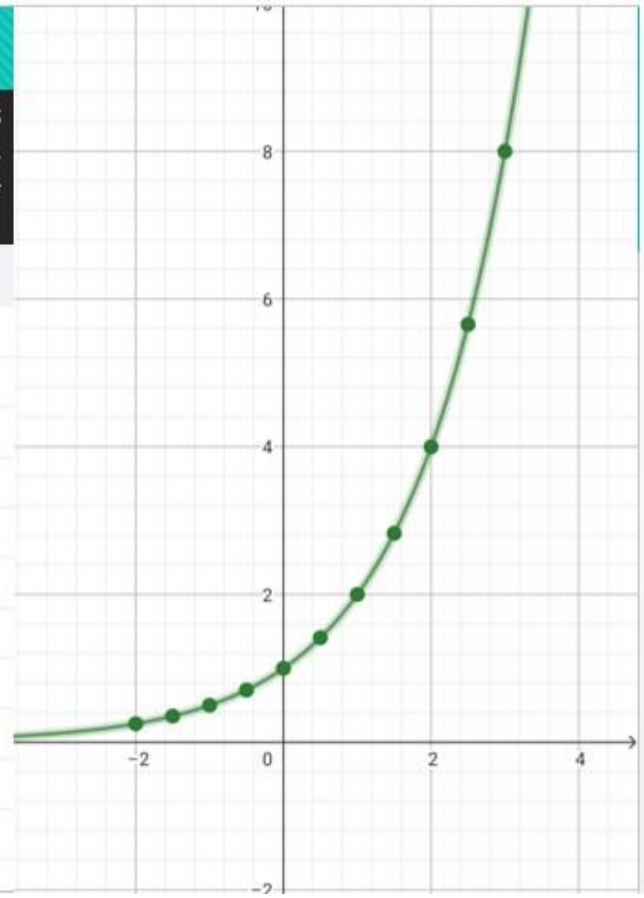

Funciones Exponenciales
Si la base a es 10, la misma se conoce como base decimal y la función $f(x) = 10^X$ se conoce como función exponencial decimal
En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada para una base es el número irracional e = 2.718281828; Cuando este número es usado como base de la potencia, la función dada por $f(x) = e^X$ recibe el nombre de función exponencial natural.

graficar la función $f(x) = 2^x$

Observamos que cuanto menor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del *eje* x, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. La recta sostén del *eje* x, por este motivo es llamada de asíntota a la curva

x	y	
-4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	$\left(2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\right)$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}\right)$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\right)$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}\right)$
0	$2^0 = 1$	
1	$2^1 = 2$	
2	$2^2 = 4$	
3	$2^3 = 8$	
4	$2^4 = 16$	

x	f(x)
−2	0.25
−1.5	0.3535533905933
−1	0.5
−0.5	0.7071067811865
0	1
0.5	1.4142135623731
1	2
1.5	2.8284271247462
2	4
2.5	5.6568542494924
3	8



x	f(x)
−2	0.1111111111111
−1.5	0.1924500897299
−1	0.3333333333333
−0.5	0.5773502691896
0	1
0.5	1.7320508075689
1	3
1.5	5.1961524227066
2	9

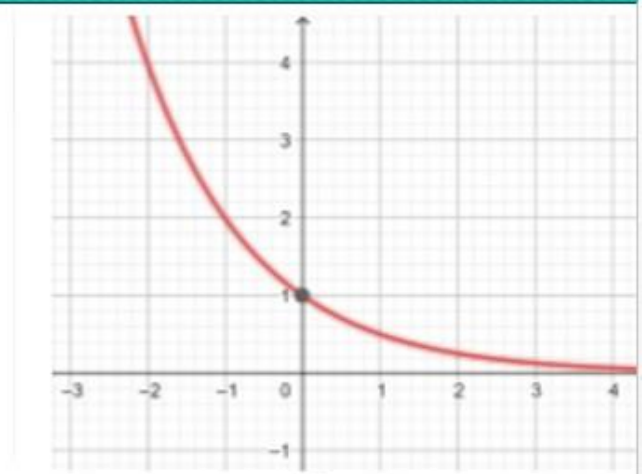
x	f(x)
−2	0.04
−1.5	0.0894427191
−1	0.2
−0.5	0.4472135955
0	1
0.5	2.2360679774998
1	5
1.5	11.180339887498
2	25

x	f(x)
−2	0.01
−1.5	0.0316227766017
−1	0.1
−0.5	0.3162277660168
0	1
0.5	3.1622776601684
1	10
1.5	31.622776601683
2	100

graficar la función $f(x) = (1/2)^x$

Observamos que cuanto mayor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del *eje x*, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. Por este motivo, la recta sostén del *eje x*, es una asíntota a la curva.

x	y
-4	$2^4 = 16$
-3	$2^3 = 8$
-2	$2^2 = 4$
-1	$2^1 = 2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$



Gráfico

LA BASE e

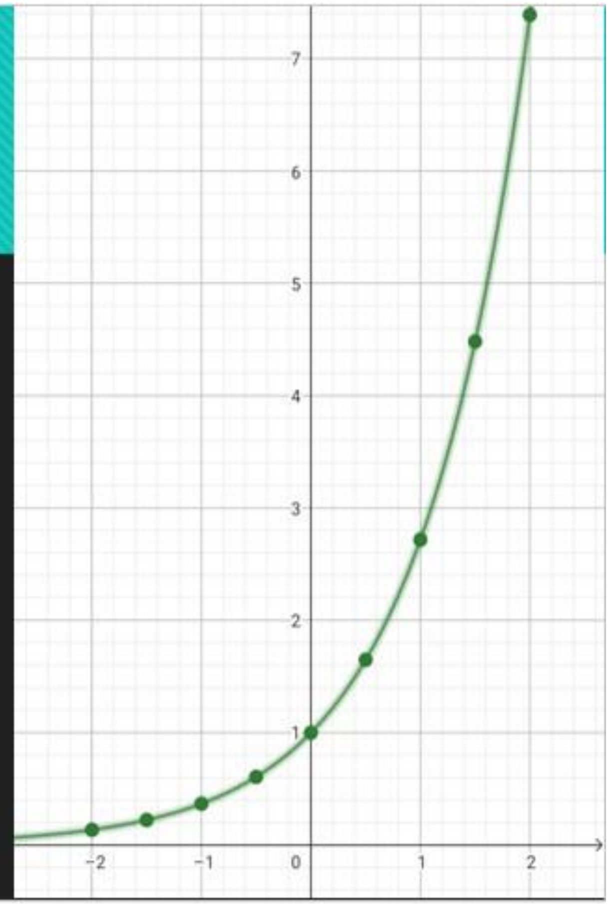
Esta base es muy importante porque se usa para modelar situaciones que ocurren en la naturaleza. Como ya mencionamos antes, el número e es un número irracional.

A este número se le llama e, en honor al matemático suizo Leonard Euler (1707-1783). La función exponencial base e se define como $f(x) = e^{X}$ es llamada la función exponencial natural

Graficar la función $f(x) = e^X$

x	y
-2	$e^{-2} \approx 0.14$
-1	$e^{-3} \approx 0.37$
0	1
1	2.72
2	7.39

Como e > 1 , la gráfica es creciente en todo su dominio. El intercepto en y es (0,1). La recta y= 0 (el eje de) x es la asíntota horizontal. Le aplican las restantes propiedades que se enumeran para la función $f(x) = a^2 1$, a > 1



Funciones Logarítmica

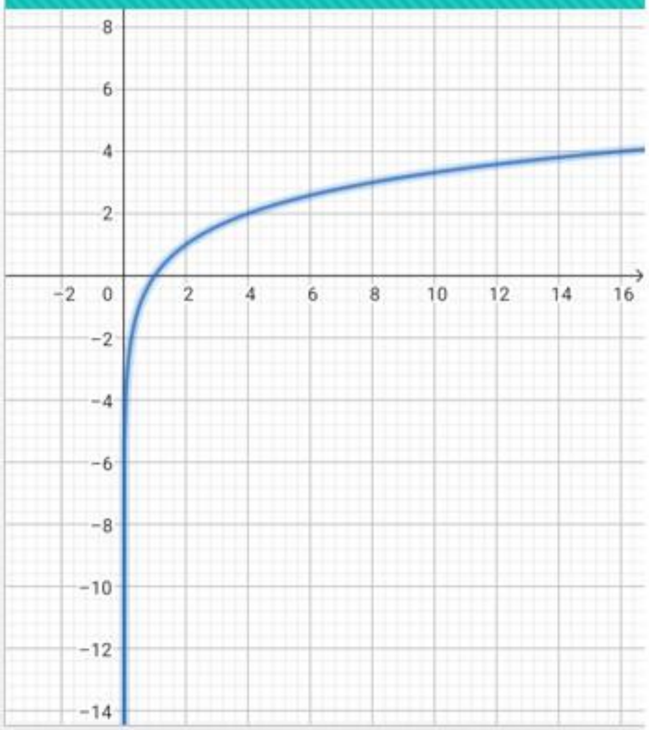
DEFINICIÓN:
Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Sea x cualquier número real positivo. La **función logarítmica con base** a se define por $f(x) = \log_a x$ ó $y = \log_a x$, donde $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$.

La asíntota vertical es una recta vertical a la cual la gráfica de la función se acerca cuando la variable independiente (x), se acerca a un valor fijo c. Si la gráfica tiene este comportamiento, se dice entonces que la recta x = c es una asíntota vertical para la gráfica. La gráfica de una función nunca interseca la asíntota vertical.

Graficar la función $f(x)= \log_2 x$

Para hacer la tabla de valores le asignaremos valores a la variable x, para los cuales $\log_2 x$ resulte cómodo de hallar. Siempre es conveniente usar el 1 y la base del logaritmo, así como potencias enteras de la base del logaritmo. Como la base es 2, podemos usar: $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^{-2} = \frac{1}{4}$; entre otros.

$y = \log_2 x$ ($\log_2 x = y$ es equivalente a $2^y = x$)



x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Decir que los valores de x se acercan al cero por la derecha quiere decir que los valores de la variable x serán números mayores de cero, empezando con números que están lejos del cero y terminando con números cercanos al cero.

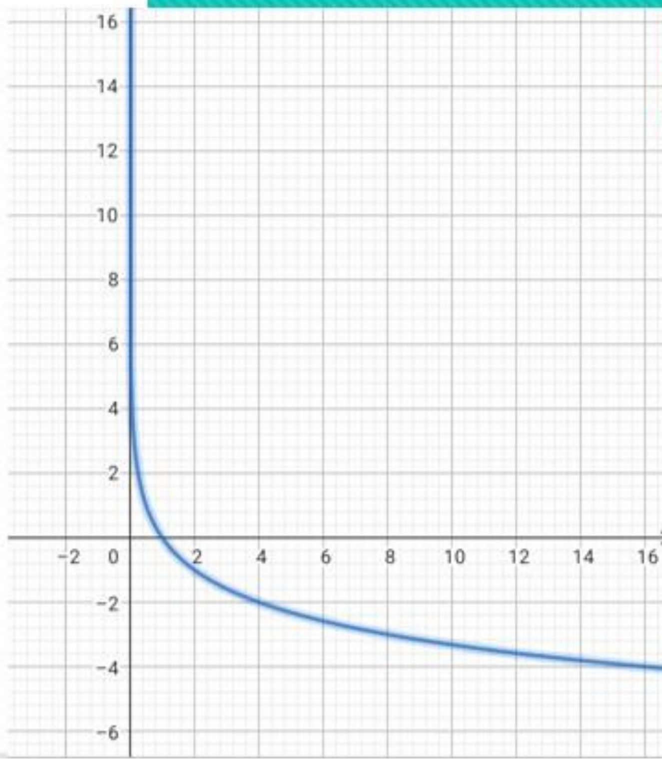
Graficar la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Dominio: $x > 0$

$\therefore D = (0, \infty)$

$\log_{\frac{1}{2}} x = y$ ó $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2



Traza la gráfica de $f(x) = \log_2(x-1)$.

Dominio:

$x - 1 > 0$

$x > 1$

Asíntota vertical:

Para hallar la asíntota vertical se iguala el argumento de la función a cero y se resuelve, ya que la gráfica de una función logarítmica puede estar a la derecha o a la izquierda de la asíntota vertical.

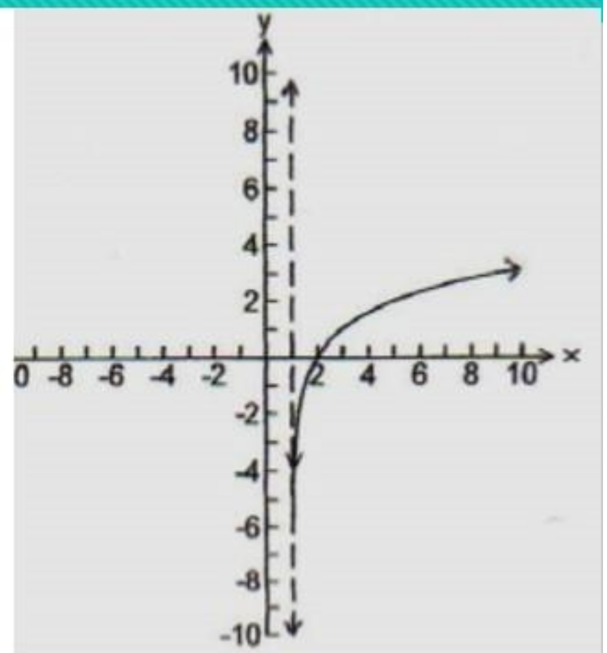
$x - 1 = 0$

$x = 1$

Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical para la gráfica.

Para hallar los valores de x de la tabla, igualamos el argumento a 1 , a 2 y a potencias enteras de 2, como por ejemplo 4 y 8 ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$).

x	y			
2	0	$x-1=1$,	$x=2$,	$f(2)=0$
3	1	$x-1=2$,	$x=3$,	$f(3)=1$
5	2	$x-1=4$,	$x=5$,	$f(5)=2$
9	3	$x-1=8$,	$x=9$,	$f(9)=3$



Colegio de Bachilleres de Chiapas

En equipo soluciona los siguientes ejercicios

Ejercicio 1. En las siguientes funciones definidas, identifique las que son funciones exponenciales.

a) $y = 10^x$ ________ b) $f(x) = x^{10}$ ________ c) $y = 10x$ ________

d) $y = \frac{10}{x}$ ________ e) $f(x) = (0,1)^x$ ________ f) $y = \frac{2^x}{3^x}$ ________

Ejercicio 2. **La función (?) = 5^x es una función exponencial con base________evalúe la función en los siguientes casos.**

f(-2)=
f(0) =
f(2) =
f(4) =
f(6) =

Ejercicio 3. Verifique si las funciones abajo son crecientes o decrecientes en R. Justifique

	$a)\ f(x) = (1,6)^x$		$b)\ y = 10^x$		$c)\ f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$
	$d)\ y = (10^{-1})^x$		$e)\ f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$		$f)\ y = \pi^x$
	$g)\ y = (\sqrt{2} - 1)^x$		$h)\ y = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-x}$		$i)\ y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-x}$

Ejercicio 4 Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

$a.\ f(x) = 3^x$

$b.\ h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

INSTRUMENTOS DE EVALUACION

Colegio de Bachilleres de Chiapas
Lista de cotejo para evaluar ejercicios

Alumno:	**UAC:**	
Sem/grupo:	**No. De Progresión:**	**Fecha de aplicación:**

Indicadores de presencia		**Opciones**				**Puntaje**
		E	**S**	**I**	**N**	
1	El estudiante se integró para llevar a cabo la actividad.					
2	El equipo realiza todos los ejercicios planteados					
3	El equipo realiza los procedimientos adecuados para el trazo de las gráficas respectivas al ejercicio 4					
4	El estudiante identifica correctamente una función exponencial de acuerdo al ejercicio 1					
		Total de puntos				

E	Excelente	25-23 puntos
S	Suficiente	22-15 puntos
I	Insuficiente	14-5 puntos
N	Nada	4-0 puntos

Colegio de Bachilleres de Chiapas

Lista de cotejo para evaluar la construcción de graficas exponenciales y logarítmicas

Alumno:			**UAC:**				
Sem/grupo:		**No. De Progresión:**		**Fecha de aplicación:**			
Indicadores de presencia		**Opciones**				**Puntaje**	
		E	**S**	**I**	**N**		
1	El estudiante se integró para llevar a cabo la actividad.						
2	El estudiante llevo a cabo las indicaciones para la construcción de graficas de funciones exponenciales y logaritmicas						
3	El estudiante apoya a su compañero en seguir las instrucciones.						
4	El equipo propone su conclusión de que ambas funciones son inversas.						
		Total de puntos					

E	Excelente	25-23 puntos
S	Suficiente	22-15 puntos
I	Insuficiente	14-5 puntos
N	Nada	4-0 puntos